

Elastostatik

Statik deformierbarer Systeme

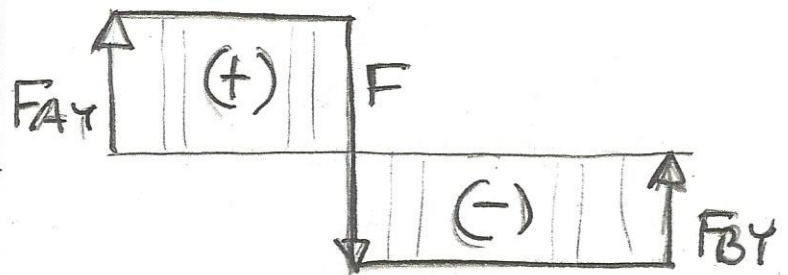
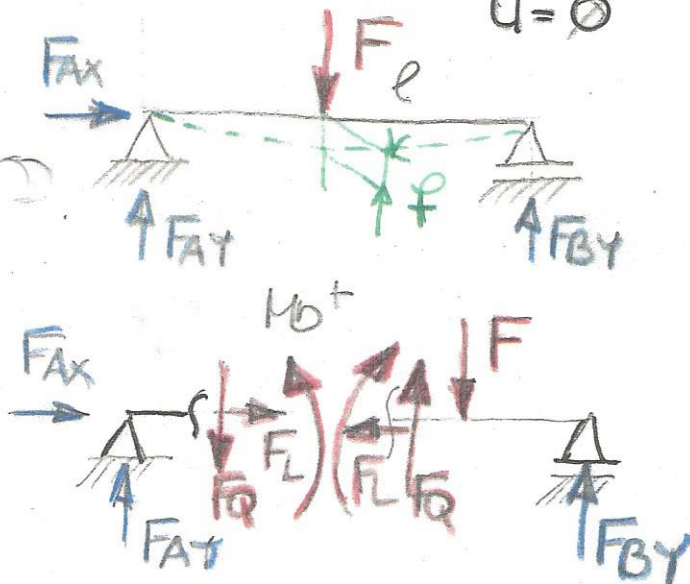
Def.: Die Fel. untersucht das Verhalten verformbarer fester Körper unter dem Einfluß äußerer Kräfte.

(Verteilung der Beanspruchung oder Schnittgrößen im Körperinneren; Verformung des Körpers)

Träger:

$$U = \sum m - 3n$$

$$U = 0$$

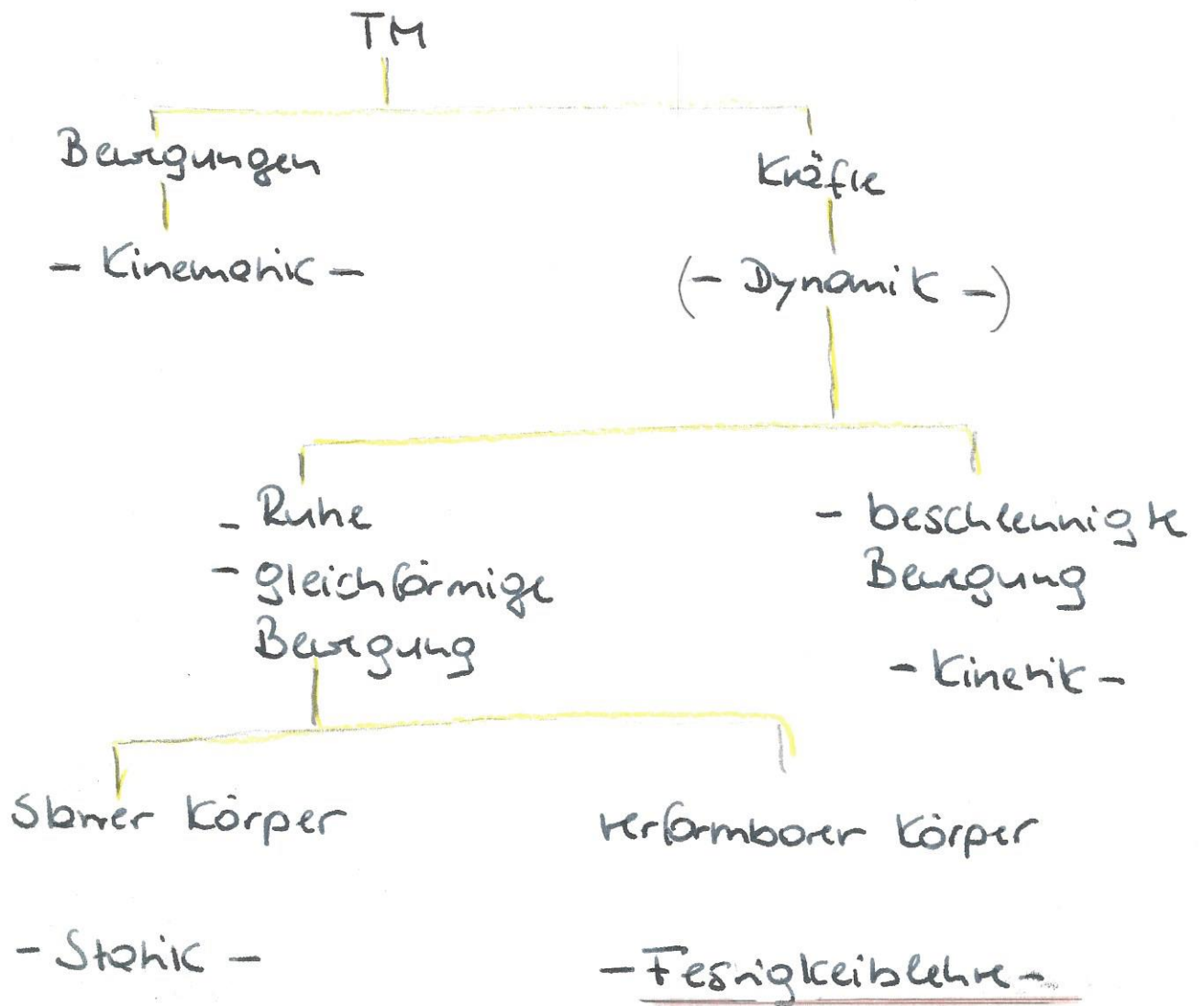


$$M_b = F_{Ay} \cdot \frac{l}{2}$$

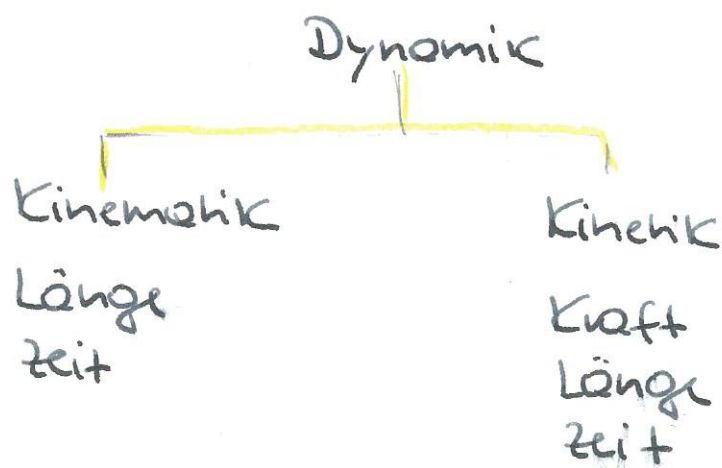
$$f = \frac{F \cdot l^3}{48 E I}$$

Festigkeitlehre

- Teilgebiet TM
 - verformbarer fester Körper
 - äußere Kräfte, Momente
 - Behandlung von Kraftwirkungen im Inneren von Körpern
 - Formänderungen
 - elementare Fkt. linienförmige Träger
 - Vermeidung des Versagens
 - ideale homogene, isotrope Körper
 - Werkstofftechnik
 - Statik
-
- Beanspruchungen
 - Verformungen

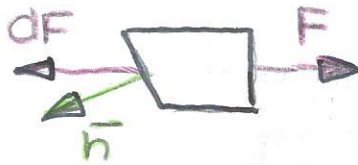


2. Möglichkeit



Begriffe

Spannung:



$$s = \frac{dF}{dA}$$

- Vektor = Kraft pro Flächeneinheit
- Kann zerlegt werden
- Beanspruchung eines elast. Körpers durch äußere Kräfte oder Momente
- Sp. ist auftretende innere Reaktionskräfte je Flächeneinheit

- σ - Normalspannung
 - Zug, Druck, Biegung

- τ - Tangentialspannung
 - Schub (Scherung), Torsion

Nennspannungskonzept:

nach diesem Konzept werden wir in der FkE. rechnen!

- Berechnung der Nennspannungen basierend auf Nettoquerschnittsfläche
- Spannungsspitzen finden Berücksichtigung in der ertragbaren (zul. Sp.)

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} \leq \sigma_{bzul} ; \sigma_{td} = \frac{F}{A} \leq \sigma_{zul}$$

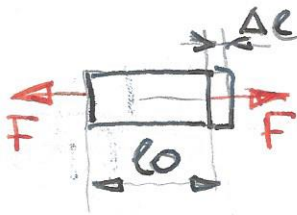
Kerbspannungskonzept:

$$\sigma_{max} = \sigma_k \cdot \sigma_n$$

- Konzept der örtl. Spannungen
- Berechnung in der Kerbe (örtlich)
- Geometriewerte u. Werkstoffzustand muß vollständig beschreibbar sein

Verformungen:

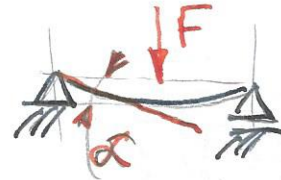
$\Delta e; \varphi^\circ; \tan \alpha$ [mm; °; (rad)]



Längung



Verdrehung



Durchbiegung

$E = 2,1 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2}$
Stahl

Verformungen:

aus Verformungen abgeleitet

Dehnung : $\frac{\Delta e}{e} = \epsilon$

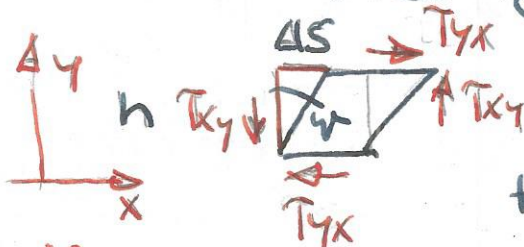
Stab ziehen !

Hook'sches Gesetz: $\frac{\Delta e}{e} = \frac{F}{E \cdot A}$

$G \sim \epsilon; G = E \cdot \epsilon$

Schiebung : Winkeländerung
kl. Behälter

Zahn verdrehen !



$\tan \gamma = \frac{\Delta s}{h}$

$\tan \gamma \approx \gamma = \frac{\Delta s}{h}$

$G = 8,1 \cdot 10^4 \frac{N}{mm^2}$

Stahl

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$\tau \sim \gamma$

$\tau = G \cdot \gamma$

Hook'sches Gesetz

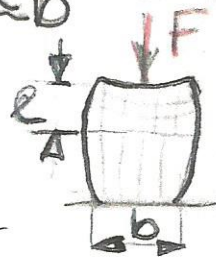
Gleitung : bleibende Schubverformung

isotrope
Werkstoffeigenschaften

Ergänzungen

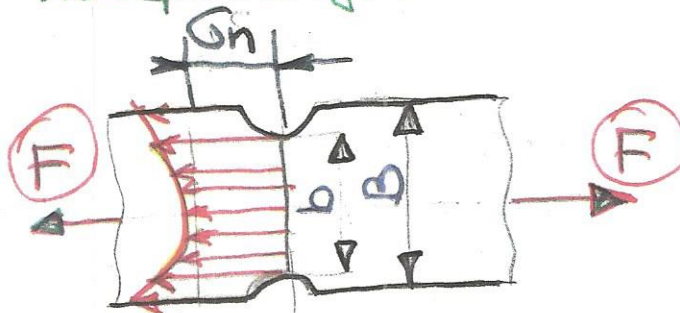
$$l \approx b$$

Prinzip von St. Venant:



- Beobachtete Stelle für Spannungen befindet sich in genügend großer Entfernung vom Kraftangriffspunkt.
- dort kann erst mit einer gleichmäßigen Spannungsverteilung gerechnet werden

Nennspannungen



St. Venant

$$\sigma_n = \frac{F}{A(b)}$$

- in Wirklichkeit ist der Spannungsverlauf nicht gleichmäßig

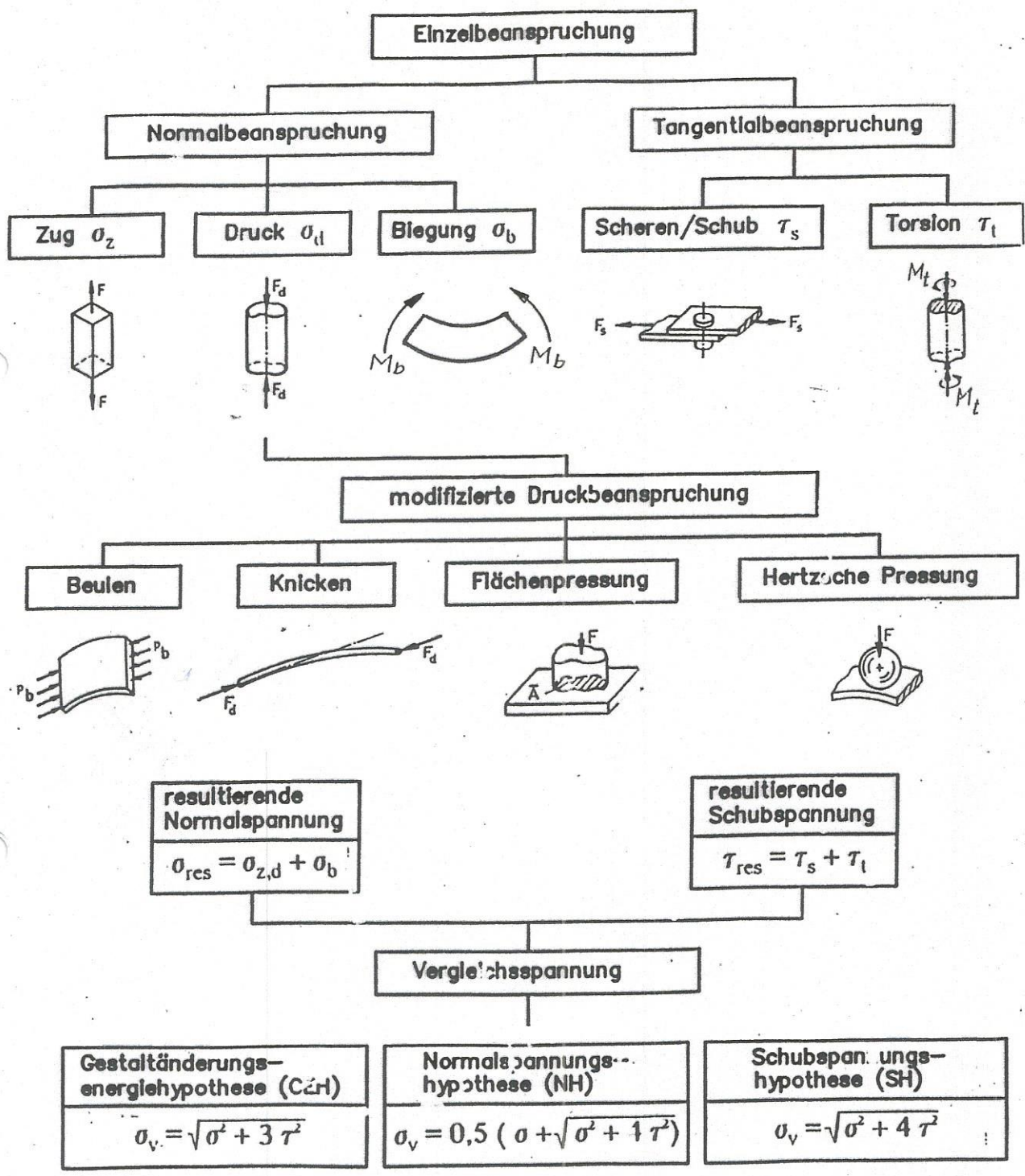
Nennspannung

- es treten Spannungsspitzen auf

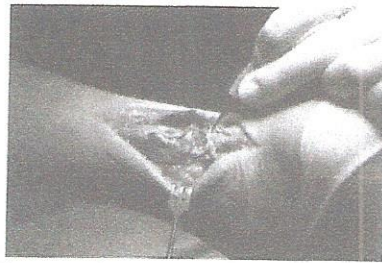
Korrektur
Formzahl α_k

- infolge Kerbe
Zweiachsiger Spannungszustand

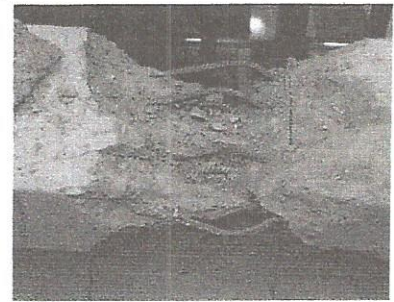
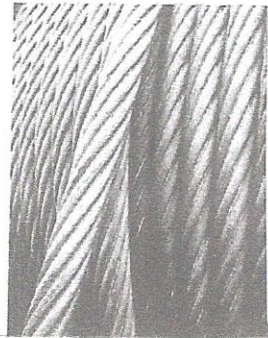
$$\sigma_{\max} = \alpha_k \cdot \sigma_n$$



Zerissene Achillessehne



Versuch
Klebung
einer
Metallstange

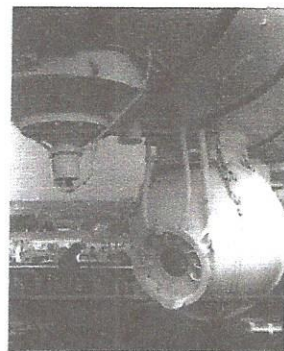
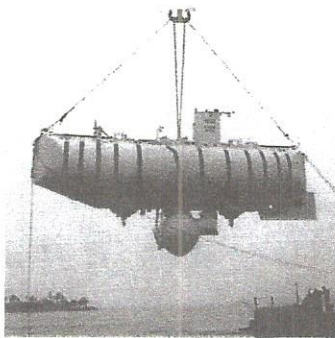


Innendruck



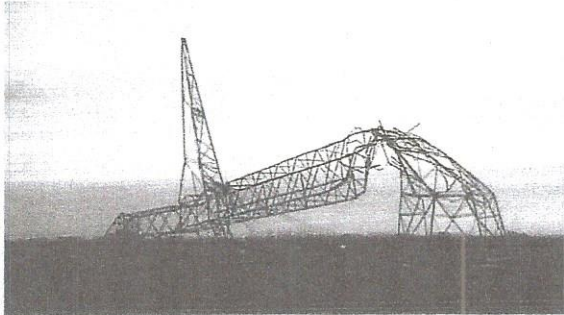
Golden Gate

Biegebuch



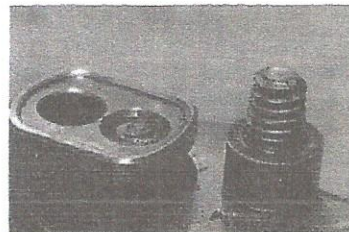
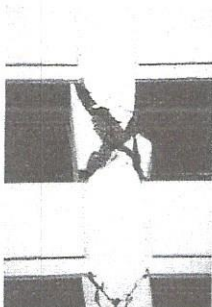
1960er

Knickung



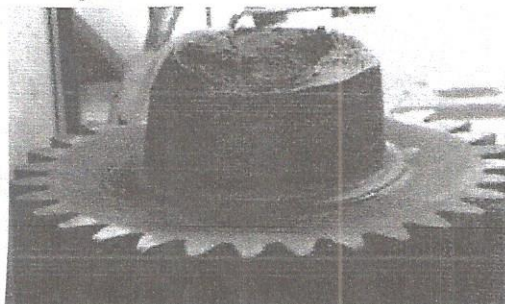
$$\epsilon = 0 = \epsilon_{el} + \epsilon_{th}$$

$$0 = \frac{\sigma}{E} + \Delta T \alpha_t$$



Torsion
nachdem

Abb. 2.1.4: Scherversagen†.

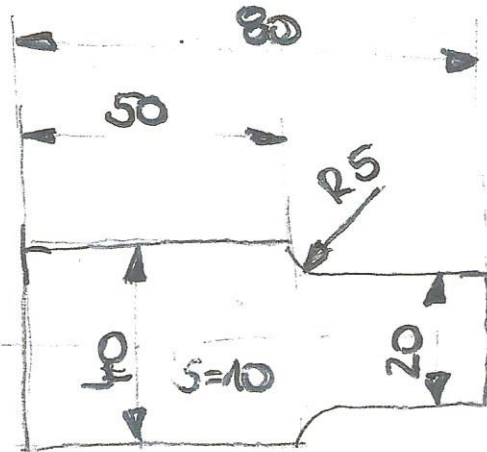
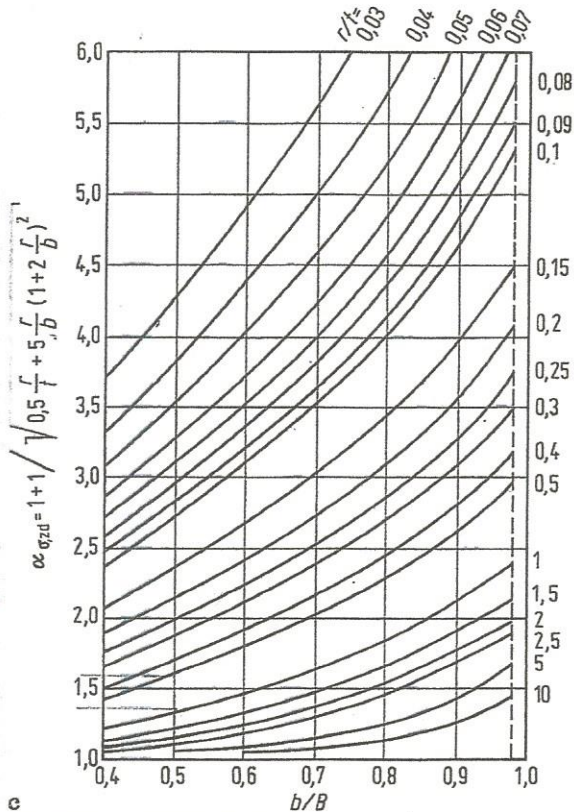
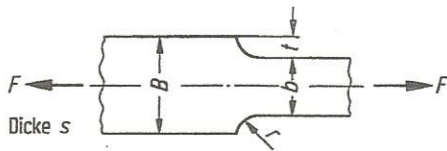


Torsionsbruch

Torsionsbruch

Bsp. Kerbspannungskonzept zugstab, abgedreht

PROF. DR.-ING.
NORBERT MIERSCH
WWW.TH-WILDAU.DE
+49 3375 508 193
Fax: +49 3375 508 354



$$r = 5 \text{ mm}$$

$$t = 10 \text{ mm}$$

$$b = 20 \text{ mm}$$

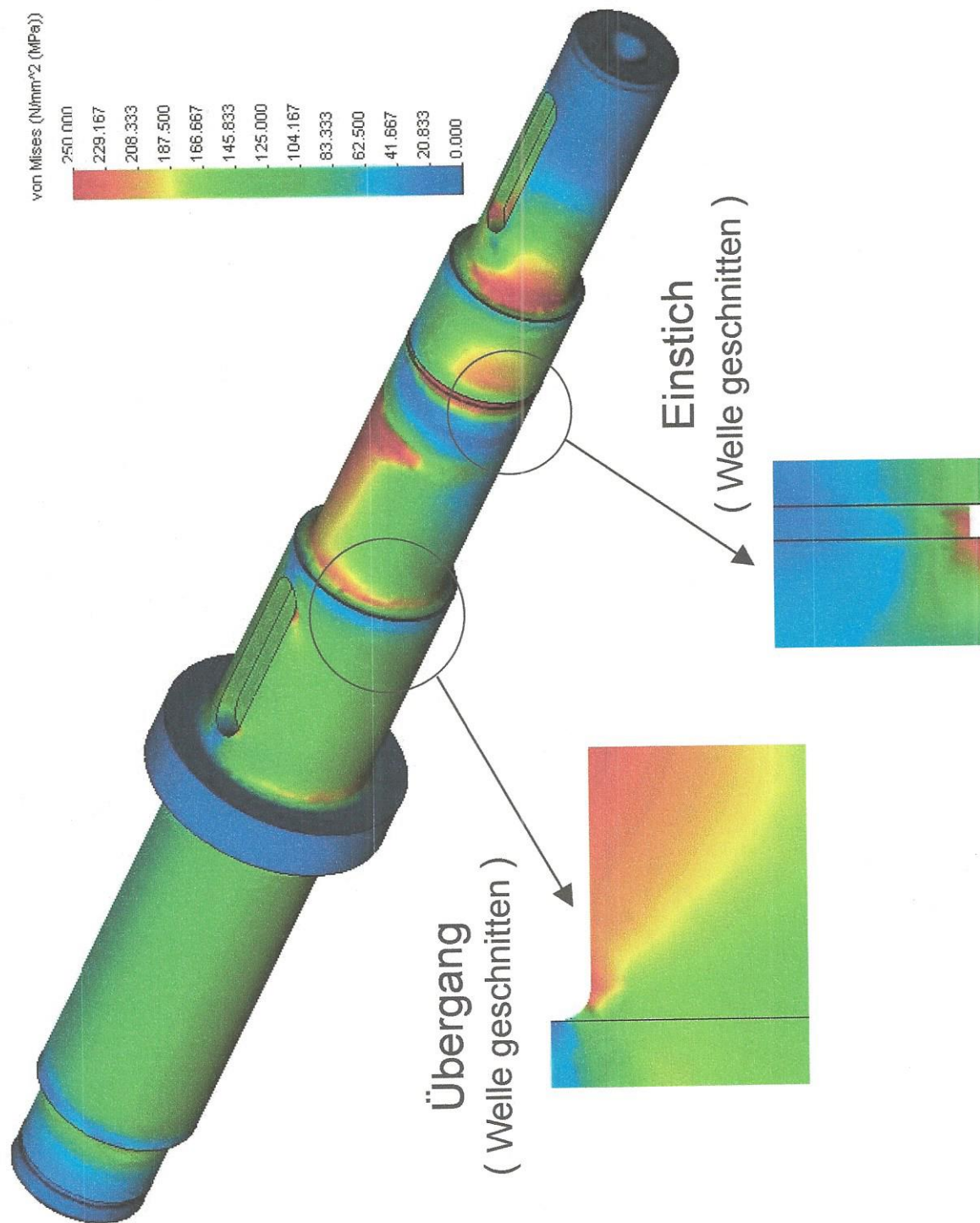
$$K_t = 1 + \frac{1}{\sqrt{0.5 \cdot \frac{5}{10} + 5 \cdot \frac{5}{10} \left(1 + 2 \cdot \frac{5}{10}\right)^2}}$$

$$K_t = 1.57$$

$$\sigma_{\max} = K_t \cdot \sigma_{\min} = 1.57 \cdot \frac{F}{b \cdot s} = 1.57 \cdot \frac{20000}{20 \cdot 10}$$

$$\sigma_{\max} = 157 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Lit. Mieschen/Winter



Grundlagen der Bauteilberechnung (Nennspannungskonzept)

1. Spannungsnachweis (Sprögl.)

$$\sigma_{Zid} = \frac{F}{A} \leq \sigma_{zul}$$

$$\tau_s = \frac{F}{A} \leq \tau_{zul}$$

2. Entwurf

$$A_{erf} = \frac{F}{\sigma_{zul}}$$

$$A_{erf} = \frac{F}{\tau_{zul}}$$

z.B. $A = \frac{\pi}{4} d^2$

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi \cdot \sigma_{zul}}}$$

3. Tragfähigkeitsberechnung

$$F_{zul} = A \cdot \sigma_{zul}$$

$$F_{zul} = A \cdot \tau_{zul}$$

4. Verformungsberechnung

$$\sigma \sim \epsilon$$

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

Zug/Druck

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}$$

$$y'' = \frac{1}{E \cdot I} \cdot M_b(z)$$

Biegung

$$y_{max} = \frac{F \cdot l^3}{3 E \cdot I}$$

5. Sicherheitskoeffizient

$$S = \frac{\sigma_{lim}}{\bar{\sigma}} \quad ; \quad S_F = \frac{R_e}{\bar{\sigma}_{vorh}}$$

Sicherheitsfaktoren FCM

↑ 1,3 ... 1,5

↓ 1,2 ... 1,35

Wahrscheinlichkeit des
Auftretens der Spannung
(mittlere Werte)

Zulässige Spannungen und Sicherheit

Merke: Die zul. Spannung ist das Verhältnis einer aus
Versuchen ermittelten Grenzspannung zu einer
Sicherheitszahl $W(S)$

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_{lim}}{S}$$

für Bolteile ohne Kerbwirkung
- stat. Beanspruchung

$$\sigma_{zul} = \frac{R_e}{S}$$

- zähe Werkstoffe

$$\sigma_{zul} = \frac{R_m}{S}$$

- spröde Werkstoffe

Merke: Die Sicherheit ist das Verhältnis einer aus
Versuchen ermittelten Grenzspannung zu
einer errechneten (vorh.) Spannung.

$$S = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma} = \frac{\text{Grenzbeanspr.}}{\text{errechnet (tatsächl.)}} = \frac{\text{erh.}}{\text{vorhanden}}$$

$$SF = \frac{\sigma_F(R_e; R_{p0,2})}{\sigma}$$

$$SF = 1,2 \dots 2,0$$

Sicherheit gegen Fließen

TB 3-14 Sicherheitswerte, Mindestwerte

a) Allgemeine Sicherheitswerte

	Walz- und Schmiedestähle	duktile Eisengusswerkstoffe	
		nicht geprüft	zerstörungsfrei geprüft
S_F	1,5	2,1	1,9
S_B	2,0	2,8	2,5
S_D	1,5	2,1	1,9

b) Spezifizierte Sicherheitswerte

S_F (S_B)		Walz- und Schmiedestähle		duktile Eisengusswerkstoffe			
		Schadensfolgen		nicht geprüft Schadensfolgen		zerstörungsfrei geprüft Schadensfolgen	
		groß	gering	groß	gering	groß	gering
Wahrscheinlichkeit des Auftretens der größten Spannungen oder der ungünstigsten Spannungscombination	groß	1,5	1,3	2,1	1,8	1,9	1,65
		(2,0)	(1,75)	(2,8)	(2,45)	(2,5)	(2,2)
	gering	1,35	1,2	1,9	1,65	1,7	1,5
		(1,8)	(1,6)	(2,55)	(2,2)	(2,25)	(2,0)
S_D							
regelmäßige Inspektion	nein	1,5	1,3	2,1	1,8	1,9	1,65
	ja	1,35	1,2	1,9	1,7	1,7	1,5

c) Sicherheitsfaktor S_z (für den vereinfachten dynamischen Festigkeitsnachweis)

Bedingung	S_z
Biegung und Torsion rein wechselnd	1,0
Biegung wechselnd, Torsion statisch oder schwellend	1,2
nur Biegung schwellend bzw. nur Torsion schwellend	1,2
Torsionsmittelspannung größer Biegeausschlagspannung	1,4
Biegung und Torsion mit hohen statischen Anteilen (Mittelspannungen)	1,4

Hinweis: Beim vereinfachten dynamischen Festigkeitsnachweis werden nur die Ausschlagspannungen von Biegung und Torsion (nicht die Mittelspannungen) berücksichtigt, deshalb müssen höhere Sicherheiten als bei der genaueren Berechnung verwendet werden.

Der vereinfachte dynamische Festigkeitsnachweis sollte nur für Überschlagsrechnungen verwendet werden. Bei Berücksichtigung von S_z liegt dieser in der Regel auf der sicheren Seite.

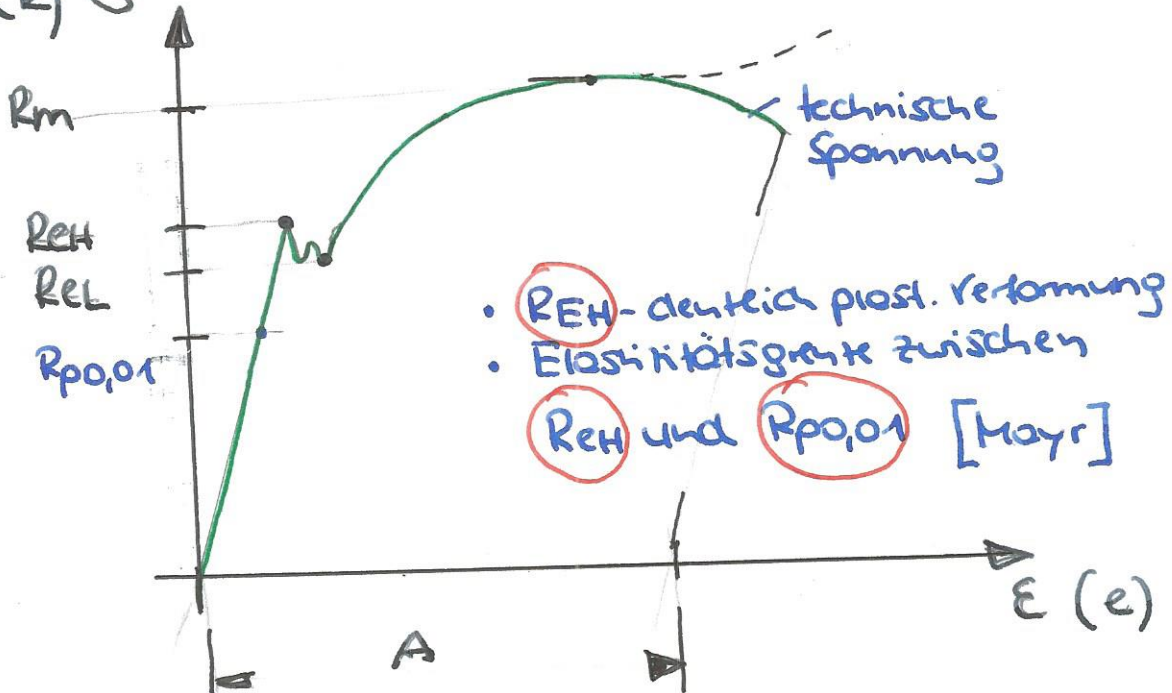
Hütte

Zugversuch

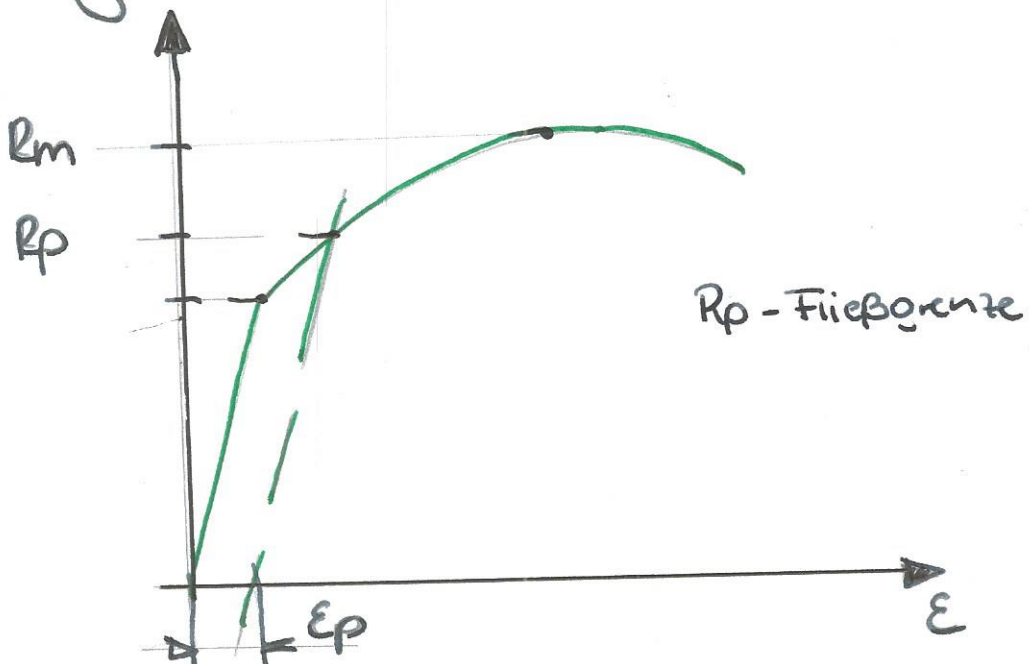
ISO

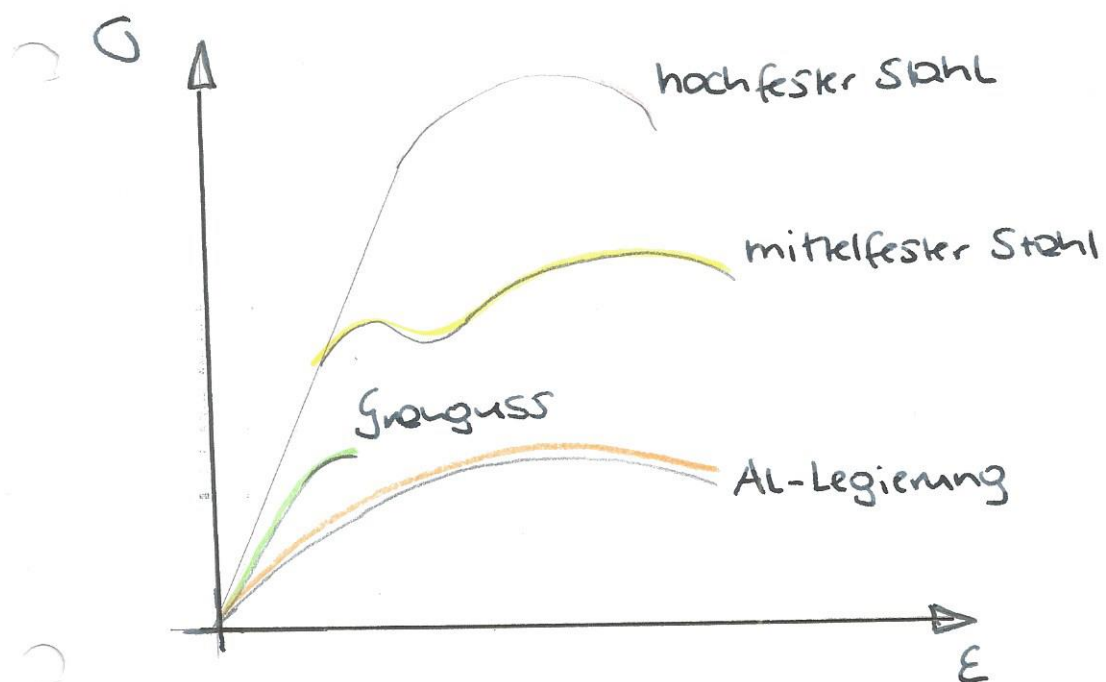
6892 (2009)

(2) G



G

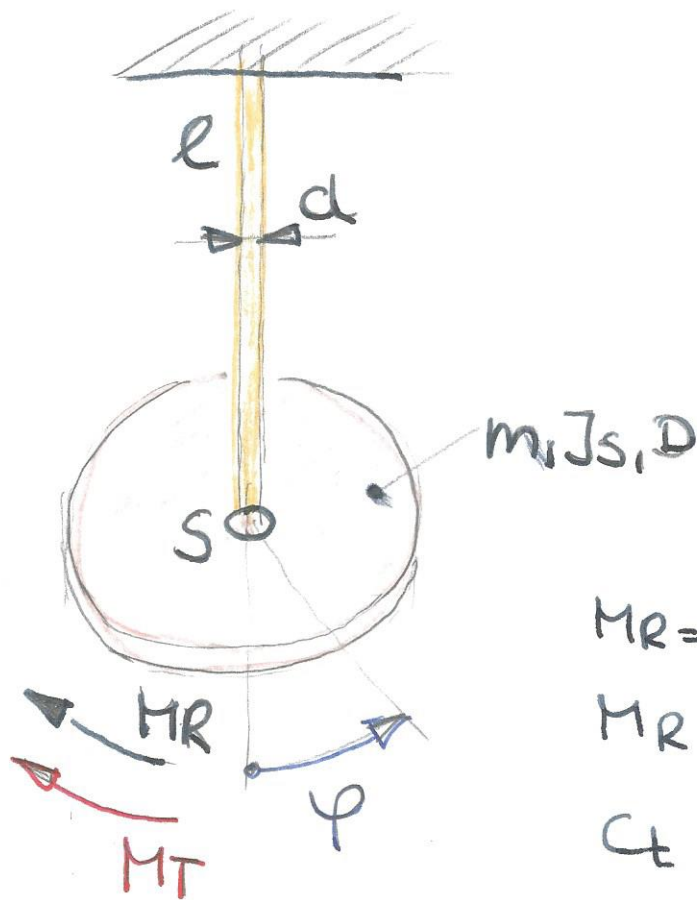




27.03.2011
07.03.2014

-1-

Ermittlung Schubmodul



$$\begin{aligned} J_S &= \frac{1}{2} m \cdot R^2 \\ &= \frac{1}{2} m \cdot \frac{D^2}{4} \\ &= \frac{1}{8} m \cdot D^2 \end{aligned}$$

M_R = Federrückstellmoment

$$M_R = c_t \cdot \hat{\varphi}$$

$$c_t = \frac{I_p \cdot G}{l}$$

$$I_p = \frac{\pi}{32} d^4$$

M_T = Trägheitsmoment

$$M_T = J_S \cdot \ddot{\varphi}$$

$$\sum \vec{M}_S = 0 : M_T + M_R = 0$$

$$J_S \cdot \ddot{\varphi} + c_t \cdot \hat{\varphi} = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{c_t}{J_S} \varphi = 0$$

$$\omega_p^2 = \frac{C_t}{J_s}$$

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_s}{C_t}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1 \text{ m} \cdot D^2 \cdot 32 \text{ e}}{8 \pi d^4 \cdot G}}$$

$$\underline{\underline{T = 2\pi \sqrt{\frac{4 \text{ m} \cdot D^2 \cdot \text{e}}{\pi \cdot d^4 \cdot G}}}}$$

HA: gege.:

$$m = 15 \text{ Kg}$$

$$D = 140 \text{ mm}$$

$$l = 2600 \text{ mm}$$

$$d = 2 \text{ mm}$$

Für 14 volle Schwingungen wurden
131 s gemessen.

ges.: G in $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Lösung:

$$T_0 = \frac{131 \text{ s}}{14} = 9,36 \text{ s}$$

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{4m \cdot D^2 \cdot l}{\pi \cdot d^4 \cdot G}$$

$$G = \frac{4m \cdot D^2 \cdot l \cdot 4\pi^2}{T^2 \pi \cdot d^4}$$

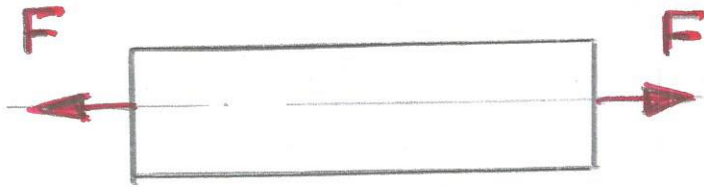
$$= \frac{16\pi \cdot 15 \cdot 0,14^2 \cdot 2,6}{9,36^2 \cdot 0,002^4}$$

$$G = 2,74 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 2,74 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\text{Alu } (25 \cdot 10^3) \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Formänderungen (Verzerrungen)

Dehnung u. Querkontraktion



$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

Dehnung : $\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ (Verzerrung)

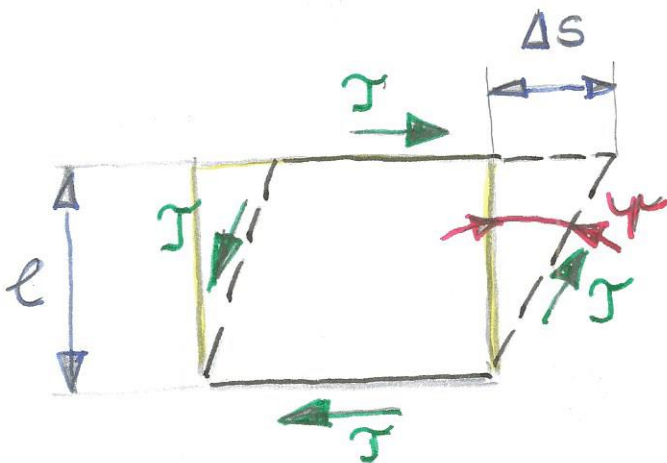
Querdehnung: $\epsilon_q = -\frac{\Delta d}{d_0}$

Querdehn - Zahl: $\nu = \frac{\epsilon_q}{\epsilon} \approx 0,3$

$\nu = 0,25 \dots 0,35$ für Metalle

$m = 1/\nu = 3 \dots 4$ Poisson'sche Konstante

Schubverformung



Schubwinkel

$$\tan \gamma \approx \hat{\gamma} = \frac{\Delta s}{l}$$

(Verzerrung)

$$\tau = G \cdot \gamma$$

$$\tau \approx \gamma; \tau = G \cdot \gamma$$

$G = 8 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ Stahl

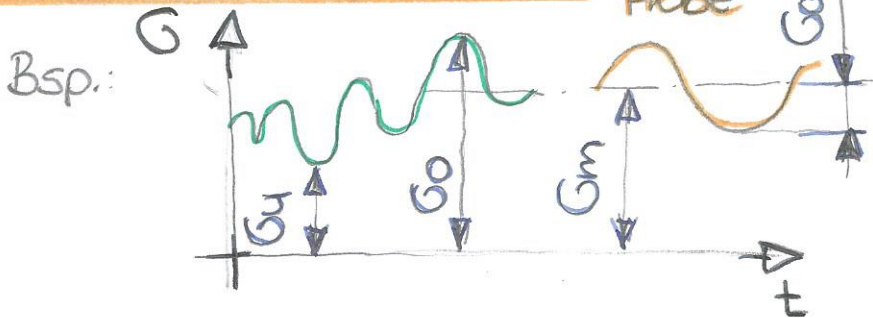
$$S_B = \frac{R_m}{\sigma}$$

$$S_B = 2 \dots 4$$

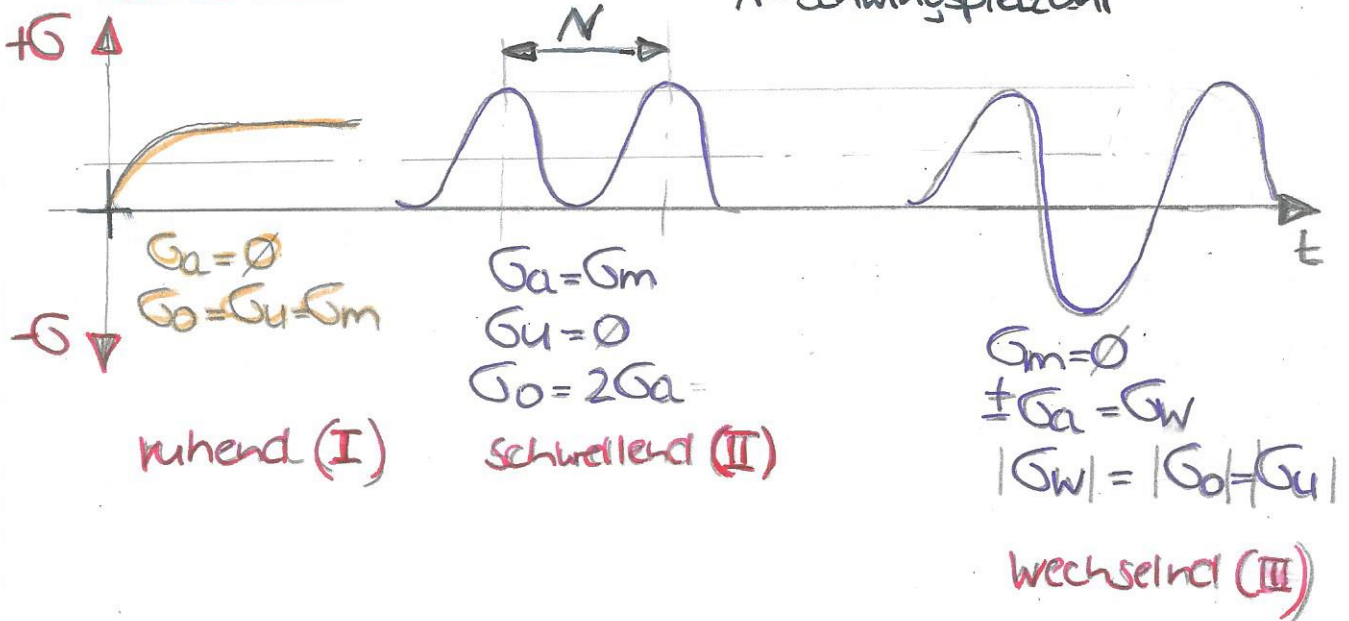
Sicherheit gegen Bruch

Lastfälle $F; M=f(t)$

1. Maschinen- u. Gerätebau



Sonderfälle nach BACH



Ruhegrad: $R = \sigma_m / \sigma_o$

Spannungsverhältnis: $\chi = \sigma_u / \sigma_o$

Stahl:

$$\sigma_{dF} \approx R_e$$

$$\sigma_{bF} \approx 1,2 R_e \quad \square$$

$$\approx 1,4 R_e \quad \odot$$

$$\tau_{tF} \approx 0,6 \dots 0,7 R_e$$

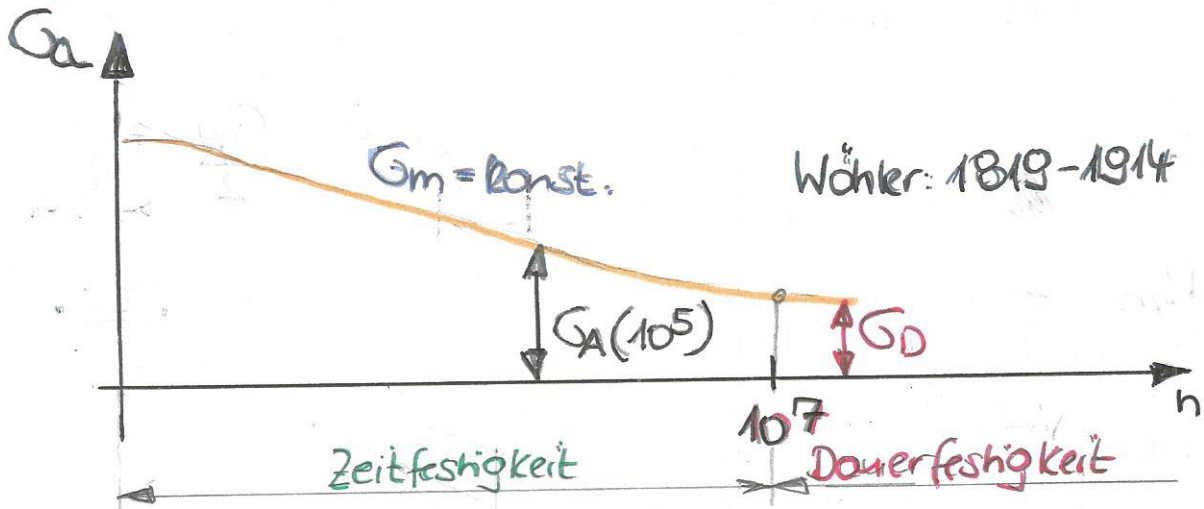
Bach; Carl Julius
 (1847-1931) Dt. Ing.

GG: $G_{dB} \approx 4 \cdot R_m$

$G_{dB} \approx 1,2 \cdot R_m$ 

$G_{dB} \approx 1,4 \cdot R_m$ 

Dynamische (schwingende) Beanspruchung



$$S_D = \frac{G_D}{G}$$

2. Stahlbau **DIN 18800**

Lastfall H; HZ

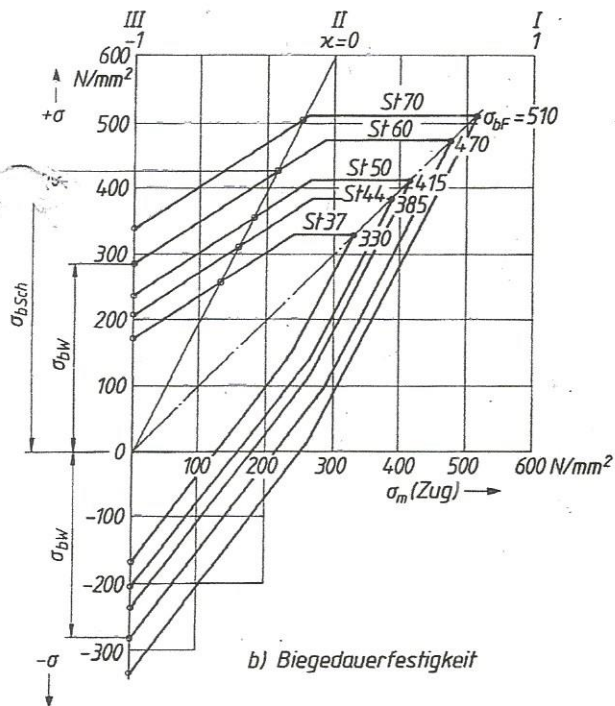
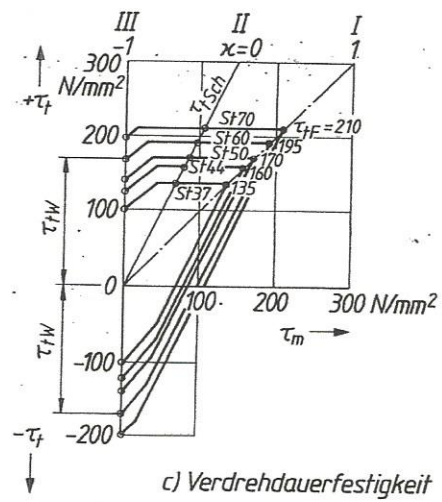
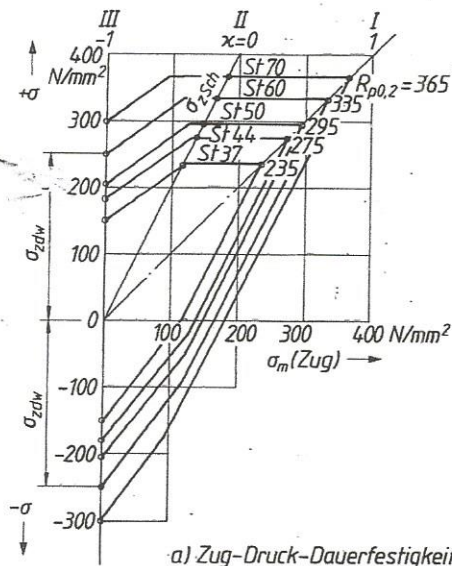
Kronbau **DIN 15018**

Lastfall H; HZ; S

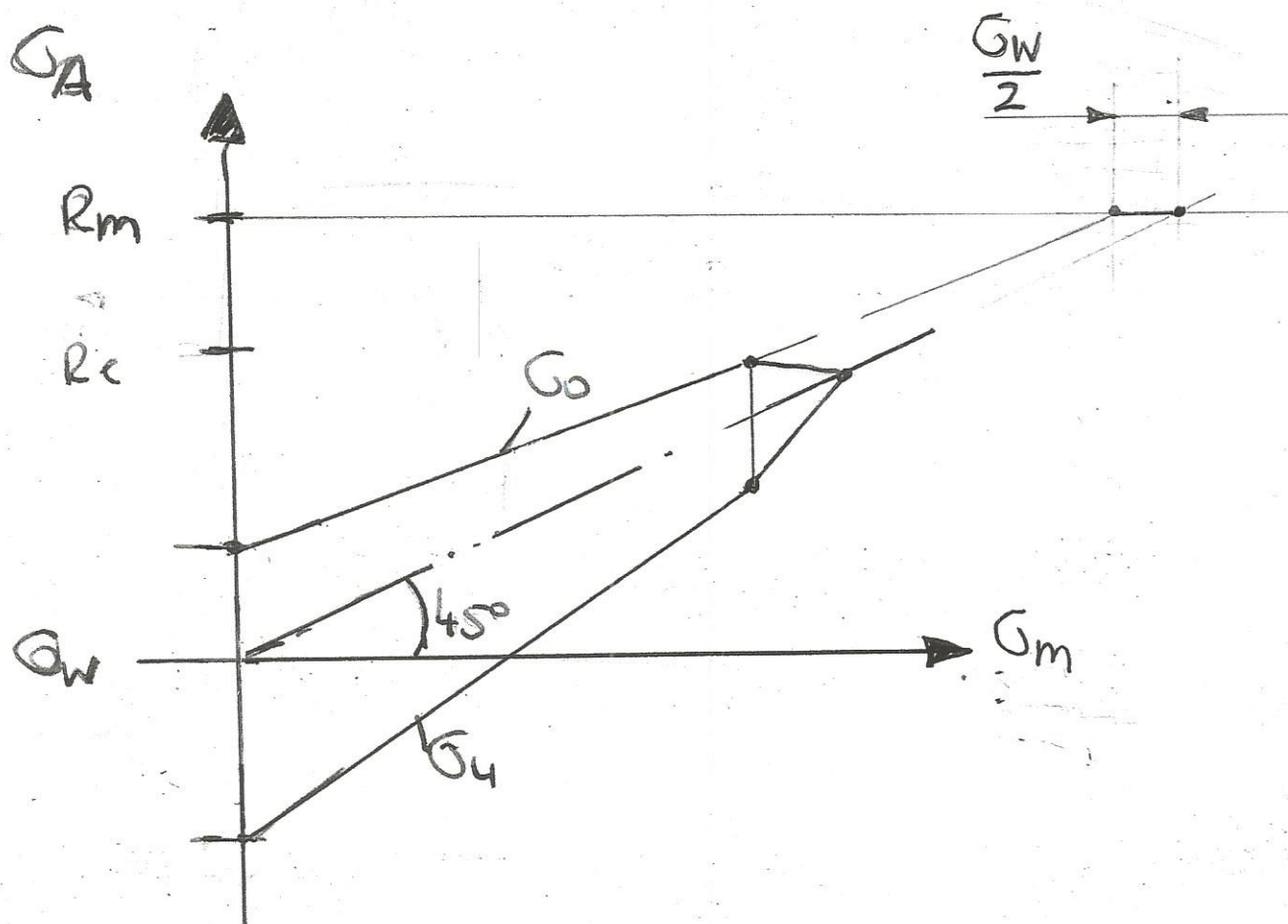
DIN 18800

Werkstoff		St 37		St 52	
		H	HZ	H	HZ
Druck u. Biegedruck Stab-nachweis DIN 4114 ; DIN 18800	σ_{zul}	140	160	210	240
Zug u. Biegezug Druck u. Biegedruck Vergleichsspannung	σ_{zul}	160	180	240	270
Schub	τ_{zul}	92	104	139	156

Dauerfestigkeitsschaubilder der Baustähle
nach DIN EN 10 025 (DIN 17 100)
Werte gerechnet nach Gl. (3.10a)

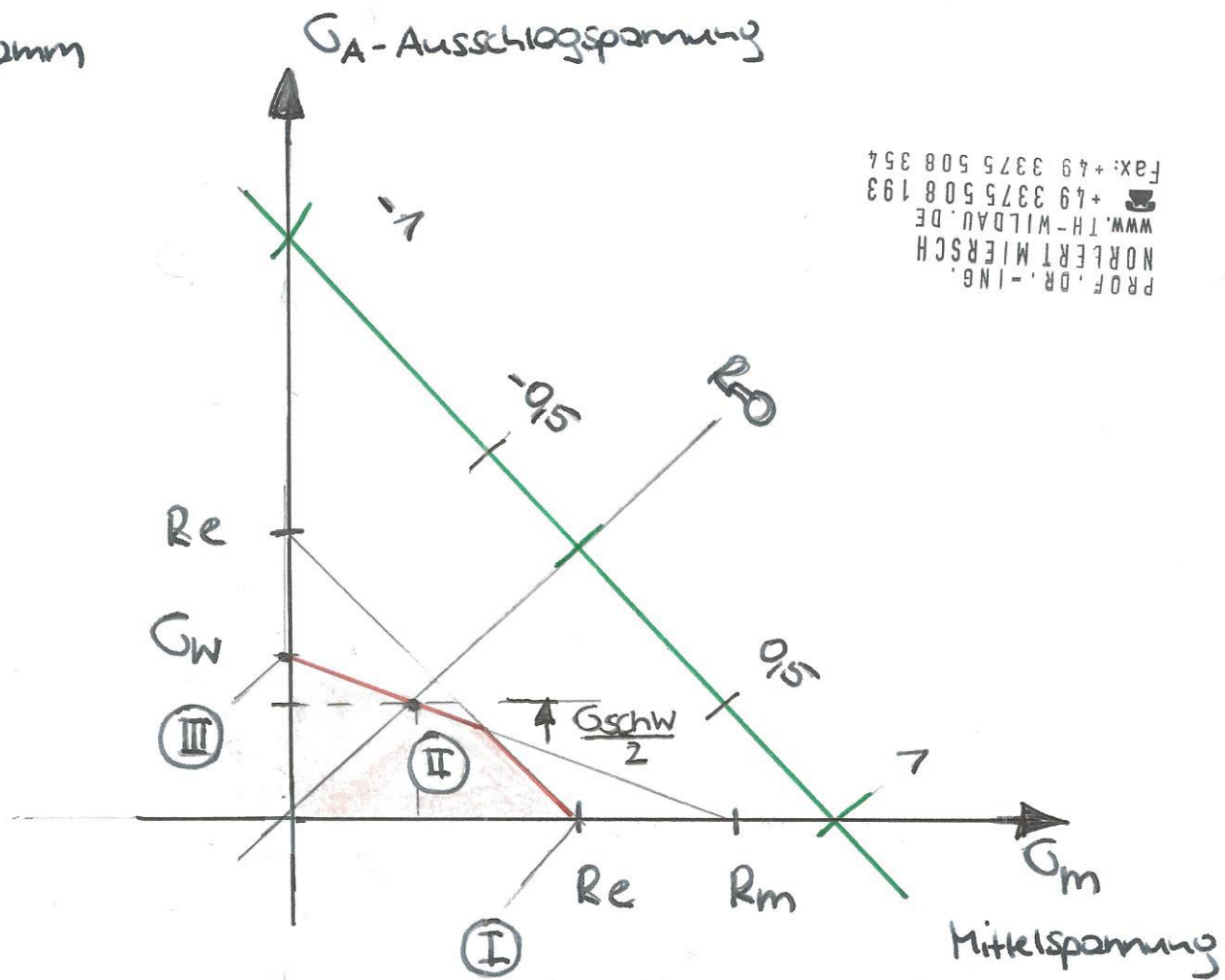


DFS (Smith)



18.03.2016

Haigh-Diagramm

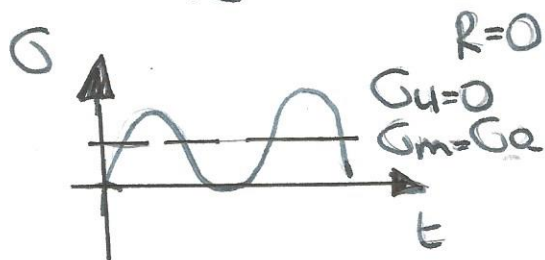
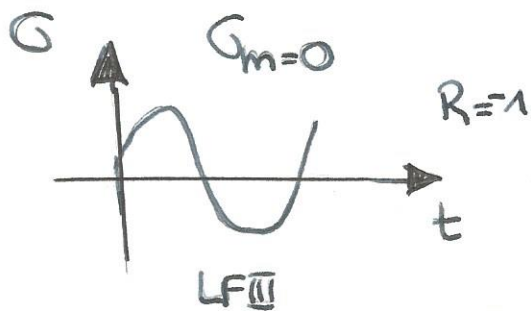


PROF. DR.-ING.
NORBERT WIRSCH
WWW.TH-WILDAU.DE
+49 3375 508 193
Fax: +49 3375 508 354

I; II; III - Lastfälle

$$R - \text{Ruhezustand} = \frac{G_y}{G_0}$$

G_W - Wechsellastspannung
Wechselspannungsfestigkeit



Werkstoffauswahl (Stahl, Guss, NE - Metalle)

Kurzname	A [%] min.	R_{mN} [N/mm ²] min.	R_{eN} $R_{p0,2N}$ [N/mm ²]	$\sigma_{zd WN}$ ($\sigma_{zd SchN}$) [N/mm ²]	$\sigma_b WN$ ($\sigma_b SchN$) [N/mm ²]	$\tau_t WN$ ($\tau_t SchN$) [N/mm ²]
----------	------------------	---	--	---	---	---

Unlegierte Baustähle nach DIN EN 10025

S235 JRG1-G2,J0,J2G3-G4	26	360	235	140 (225)	180 (270)	105 (160)
S275 JR,J0,J2 G3-G4	22	430	275	170 (270)	215 (320)	125 (190)
S355 JR,J0,J2 G3-G4,K2 G3-G4	22	510	355	205 (325)	255 (380)	150 (245)
E295	20	490	295	195 (295)	245 (355)	145 (205)
E335	16	590	335	235 (335)	290 (400)	180 (230)
E360	11	690	360	275 (360)	345 (430)	205 (250)

Vergütungsstähle nach DIN EN 10083-1 im vergüteten Zustand (+QT)

C45E	14	700	490	280 (450)	350 (525)	210 (340)
34CrMo4	11	1000	800	400 (640)	500 (750)	300 (510)
42CrMo4	10	1100	900	440 (705)	550 (825)	330 (560)
36CrNiMo4	10	1100	900	440 (705)	550 (825)	330 (560)
34CrNiMo6	9	1200	1000	480 (770)	600 (900)	360 (610)

Einsatzstähle (Festigkeitswerte nach DIN 743 -3)

C15	14	750	430	300 (430)	375 (515)	225 (300)
16MnCr5	10	900	630	360 (575)	450 (675)	270 (435)
17CrNiMo6	8	1150	830	460 (735)	575 (860)	345 (575)

Nitrierstähle nach DIN 17211 im vergüteten Zustand (+QT)

31CrMo12	11	1000	800	400 (640)	500 (750)	300 (510)
15CrMoV5-9	10	900	750	360 (575)	450 (675)	270 (460)

Automatenstähle nach DIN 1651 im kaltgezogenen Zustand (+C)

9SMnPb28	7	510	410	205 (325)	255 (380)	150 (255)
9SMnPb36	7	540	430	215 (345)	270 (405)	160 (270)

Werkstoff	$E \text{ [N/mm}^2\text{]}$	ν	$G \text{ [N/mm}^2\text{]}$
Stahl	$2,1 \cdot 10^5$	0,3	$8 \cdot 10^4$
GG (EN-GJS)	$(98 \dots 113) \cdot 10^5$	0,25	$3 \cdot 10^4$
AL	$0,7 \cdot 10^5$	0,35	$2,6 \cdot 10^4$
Cu	$1,25 \cdot 10^5$	0,15	