

Verformung bei Biegebeanspruchung

- Durchbiegung -

-1-

Durchbiegung: elast. Verformung bei Biegebeanspruchung



Zulässige Werte

Neigungen:	$\tan \alpha_{zul}$	: Gleitlager Wälzlager	$3 \cdot 10^{-4}$	$\approx 1^\circ$
			$10 \cdot 10^{-4}$	
Durchbiegungen:	f_{zul}	Allgem. MB WZM-Bau	$l/3000$	
			$l/5000$	

Warum?

- starke Geräusche
- zu starke Abnutzung
- zu starke Wälzdruckung

Kritische Drehzahl:

Es muß eine krit. Drehzahl berücksichtigt werden, sonst entsteht ein Resonanzfall

$$n_k = 946 \sqrt{\frac{1}{f_{max}}} \quad \begin{array}{c|c} f_{max} & n \\ \hline \text{mm} & \text{min}^{-1} \end{array}$$

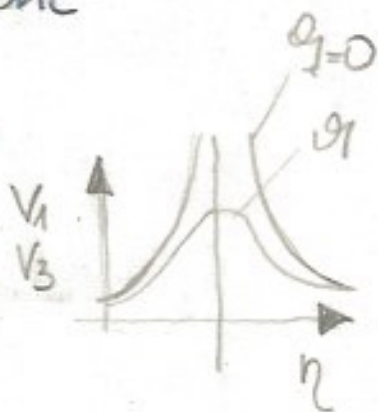
$$\eta = \frac{\omega_e}{\omega_0}$$

$$\ddot{y} + \left(\frac{c}{m}\right)y = 0$$

Kritische Drehzahl

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}y = 0$$

$$\eta = \frac{\omega_e}{\omega_0} \approx 1$$



$$\omega_0 = \frac{c}{m} = \frac{m \cdot g}{f_{max} \cdot m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 10^3 \text{ mm} \cdot 60^2}{\text{min}^2 \cdot f_{max} \text{ mm}}}$$

$$\omega_e = \omega_0$$

$$n_e = n_k = 946 \sqrt{\frac{1}{f_{max}}}$$

f_{max}	n
mm	min ⁻¹

1. Durchbiegungsbestimmung - Rechnerisch

- 3 -

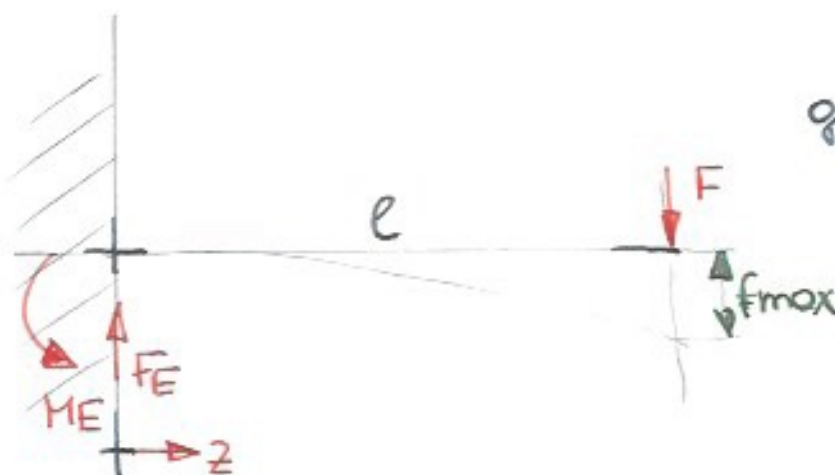
Merke: Aus der Dgl. der elast. Linie ergibt sich durch zweifache Integration unter Berücksichtigung der Randbedingungen die Def.-gung. für die elast. Linie (Biegelinie), mit der man für jede Stelle des Trägers die Durchbiegung bestimmen kann.

$$f'' = \eta'' = - \frac{M_b}{E \cdot I}$$

$\eta(z)$ - Tabelle

Zur Bestimmung der passenden Rechenvorschrift für die Durchbiegung müssen bekannt sein:

- Trägerlagerung
- Belastung



gegeben:

$$l = 5 \text{ m}$$

$$F = 3 \text{ kN}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$I_x = 8480 \text{ cm}^4$$

$$W_x = 557 \text{ cm}^3$$

ges.:

- Gln. d. elast. Linie
- f_{max}

Lösung:

Auflager

$$\circlearrowleft: +M_E - F \cdot l = 0$$

$$M_E = F \cdot l$$

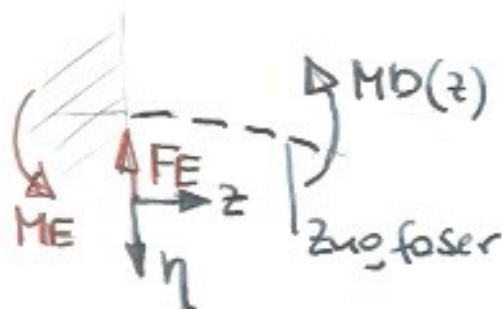
$$\uparrow: F_E - F = 0$$

$$F_E = F$$

Durchbiegung

Ansatz d. Dgl. der elast. Linie

$$E \cdot I \cdot \eta'''' = -M_b(z)$$



$$\circlearrowleft: M_b(z) - F_E \cdot z + M_E = 0$$

$$M_b(z) = F_E \cdot z - F \cdot l$$

$$= F_E \cdot z - F_E \cdot l$$

$$M_b(z) = F(z - l)$$

$$\eta' = \frac{1}{EI} \int F(l-z) dz$$

$$\eta' = \frac{1}{EI} \left(F(lz - \frac{1}{2}z^2) \right) + C_1$$

RB1:

$$C_1 = 0$$

$$z = 0$$

$$\eta' = 0$$



$$\eta = \frac{1}{EI} \left[F \left(\frac{1}{2} l z^2 - \frac{1}{6} z^3 \right) + C_2 \right]$$

RB2:

$$C_2 = 0$$

$$z = 0$$

$$\eta = 0$$

$$\eta = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} F l z^2 - \frac{1}{6} F z^3 \right]$$

$$\eta = f = y = \frac{F \cdot z}{2EI} \left[l z - \frac{z^2}{3} \right]$$

bei $z = l$ max. Durchbiegung

$$\eta = \frac{F \cdot l}{2EI} \left[l^2 - \frac{l^2}{3} \right] = \frac{1}{EI} \left[\frac{F \cdot l^3}{2} - \frac{F \cdot l^3}{6} \right]$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3-1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\eta_{\max} = \frac{F \cdot l^3}{3EI}$$

Zahlenwerte:

$$\eta_{\max} = \frac{3 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot (5 \cdot 10^3 \text{ mm})^3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot 8480 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} = \underline{\underline{7,02 \text{ mm}}}$$

$$\eta_{\text{fue}} = \frac{l}{3000} = \frac{5000}{3000} = 1,6 \text{ mm}$$

Festigkeit

$$\sigma_{Dmax} = \frac{M_{Dmax}}{\bar{I}_x} e_{max} = \frac{M_{Dmax}}{\bar{W}_{xmin}}$$

$$\sigma_{Dmax} = \frac{F \cdot l}{W_x} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^3}{557 \cdot 10^3} = 27 \frac{N}{mm^2}$$

$$\text{bei } \sigma_{bzul} = 130 \frac{N}{mm^2} \quad \sigma_D < \sigma_{bzul}$$

Nr.	Strukturbild	Gleichungen der Biegelinie	Maximale Werte	
			für Tangenten	für Verschiebungen
1		$EI\eta = \frac{F}{2} z \left(lz - \frac{z^2}{3} \right)$	$\eta'_{\max} = \frac{Fl^2}{2EI}$	$\eta_{\max} = \frac{Fl^3}{3EI}$
2		$EI\eta = \frac{q}{2} z^2 \left(\frac{l^2}{2} - \frac{lz}{3} + \frac{z^2}{12} \right)$	$\eta'_{\max} = \frac{ql^3}{6EI}$	$\eta_{\max} = \frac{ql^4}{8EI}$
3		$EI\eta = \frac{q_{\max}}{120l} z(5l^4 - z^4)$	$\eta'_{\max} = \frac{q_{\max} l^3}{24EI}$	$\eta_{\max} = \frac{q_{\max} l^4}{30EI}$
4		$EI\eta = \frac{M}{2} z^2$	$\eta'_{\max} = \frac{Ml}{EI}$	$\eta_{\max} = \frac{Ml^2}{2EI}$
Durchbiegung im Bereich				
5	① Bereich 1 ② Bereich 2	$EI\eta(z_1) = \frac{Fb}{6l} z_1[l^2 - b^2 - z_1^2]$ ① $EI\eta(z_2) = \frac{Fa}{6l} z_2[l^2 - a^2 - z_2^2]$ ②	Durchbiegung unter Last: Durchbiegung in Trügermitte:	$\eta_F = \frac{Fa^2b^2}{3EI}$ $\eta_F = \frac{Fl^3}{3EI} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \left(\frac{b}{l} \right)^2$ $\eta_m = \frac{Fa}{48EI} (3l^2 - 4a^2)$
5a		$EI\eta = \frac{Fl}{4} z \left(\frac{l^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	$\eta'_{\max} = \frac{Fl^2}{16EI}$	$\eta_{\max} = \frac{Fl^3}{48EI}$
6		$EI\eta = \frac{q}{12} z \left(\frac{l^3}{2} - lz^2 + \frac{z^3}{2} \right)$	$\eta'_{\max} = \frac{ql^3}{24EI}$	$\eta_{\max} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$
7		$EI\eta(z_1) = -\frac{M}{6l} z_1(l^2 - 3b^2 - z_1^2)$ $EI\eta(z_2) = +\frac{M}{6l} z_2(l^2 - 3a^2 - z_2^2)$	$\eta(z_1)'_{\max} = -\frac{M}{6EI} (l^2 - 3b^2)$ $\eta(z_2)'_{\max} = \frac{M}{6EI} (l^2 - 3a^2)$	$\eta_{\max} = \frac{M}{3EI} \frac{ab}{l} (a - b)$ (negativ für $a > b$)

[Hibbeler, Russell]

Elastische Linie

- hilfreich Skizze der Belastung
 - Überprüfung
 - verformte Balkenachse
 - Verbindung Schwerpunkte der Querschnittsflächen
- } - elastische Biegelinie

- elastische Linie

- Biegelinie

RB:

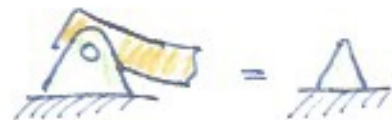
1 Rollenlager

$$V = \emptyset$$



2 Gelenklager

$$V = \emptyset$$



3 Einspannung

$$V' = \emptyset = \varphi$$

$$V = \emptyset$$



4 Freies Ende

$$F_Q = \emptyset$$

$$M = \emptyset$$

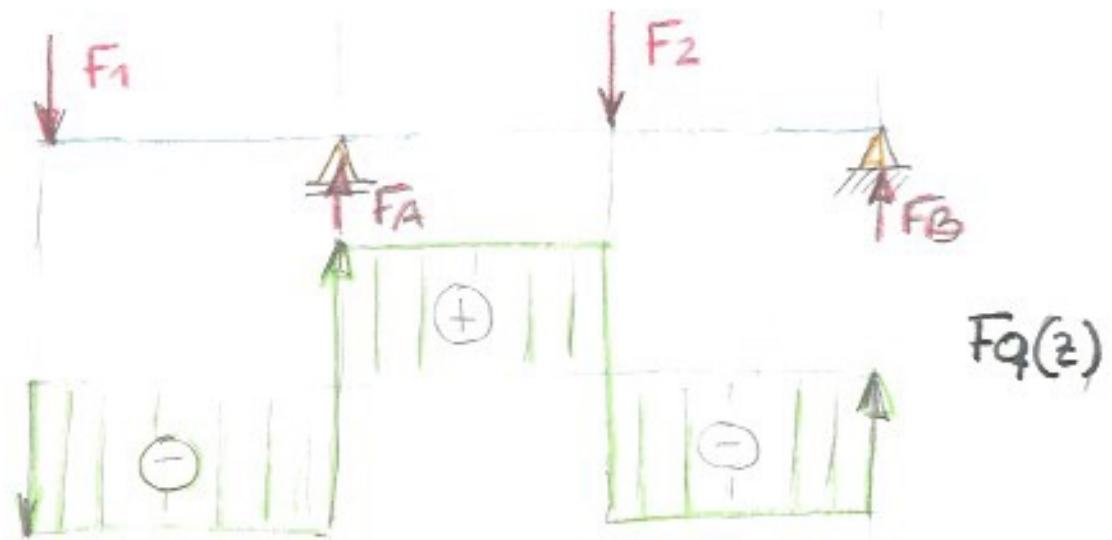
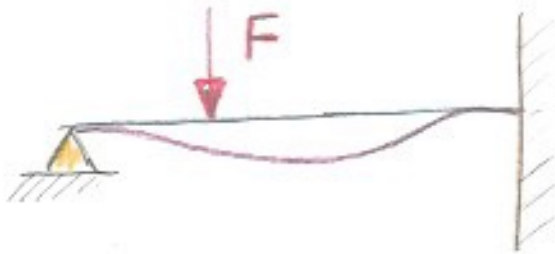


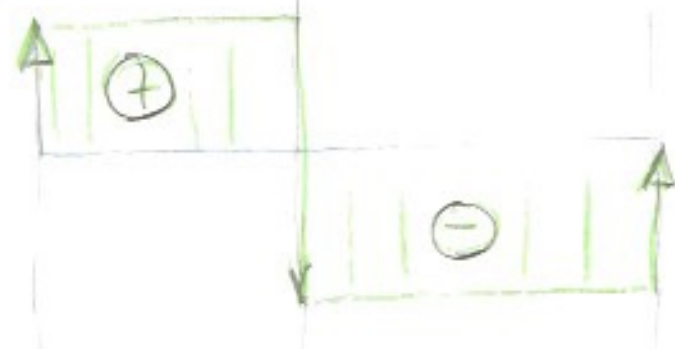
5 Gelenk

$$M = \emptyset$$

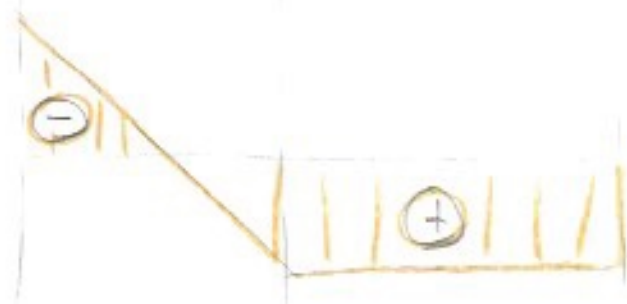


- Durchbiegung wird in vergrößerten Maßstab gezeichnet
- Hiefestellung durch Biegemomentenverlauf





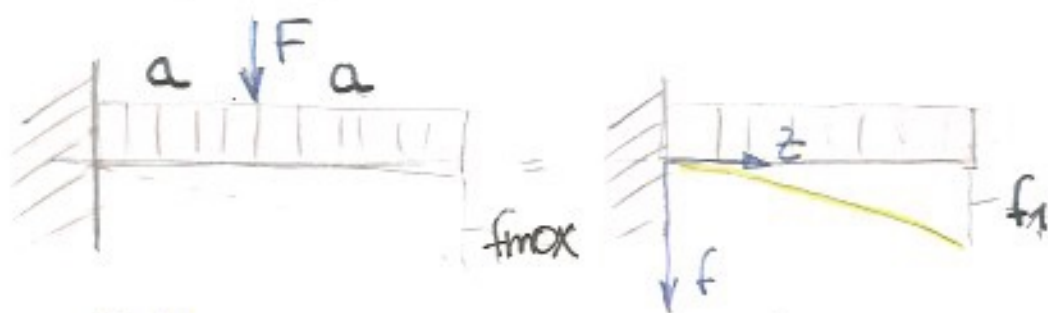
$F_Q(z)$



$M_b(z)$

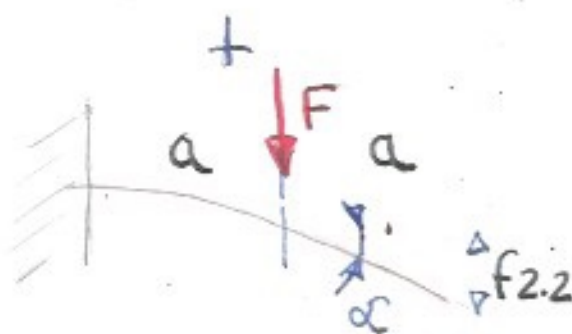
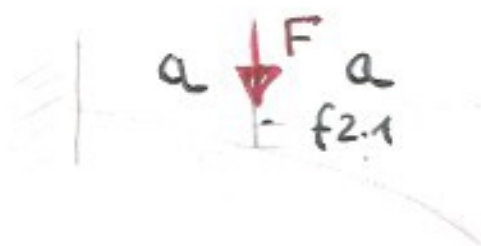


$Biegelinie$



$$l = 2a$$

$$E \cdot I = \text{konst.}$$



$$f_{\max} = f_1 + f_{2.1} + f_{2.2}$$

f_1 -Formel

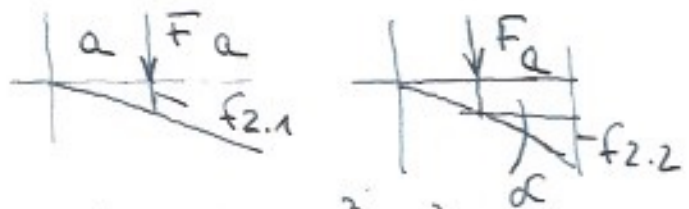
$$f_{\max} = f_{1\max} = \frac{q \cdot l^4}{8 E \cdot I} \quad \text{allg. lt. Tabelle}$$

$$f_{1\max} = \frac{q \cdot 16a^4}{8 E \cdot I} = \frac{2q \cdot a^4}{E \cdot I}$$

$$f_1 = \frac{2q \cdot a^4}{E \cdot I}$$

10. hai 2020

$$f_1 = \frac{2q \cdot a^4}{E \cdot I}$$



$$f_{2.1} = \frac{F \cdot l^3}{3E \cdot I} = \frac{F \cdot a^3}{3E \cdot I}$$

kg: $\frac{N \cdot mm^3 \cdot mm^2}{N \cdot mm^4}$

$$f_{2.2}; \quad \tan \alpha = \frac{f_{2.2}}{a} \quad ; \quad \tan \alpha = \frac{F \cdot l^2}{2E \cdot I}$$

$$f_{2.2} = \tan \alpha \cdot a = \frac{F \cdot a^2 \cdot a}{2E \cdot I}$$

$$f_{\max} = \frac{2q \cdot a^4}{E \cdot I} + \frac{F \cdot a^3}{3E \cdot I} + \frac{F \cdot a^3}{2E \cdot I}$$