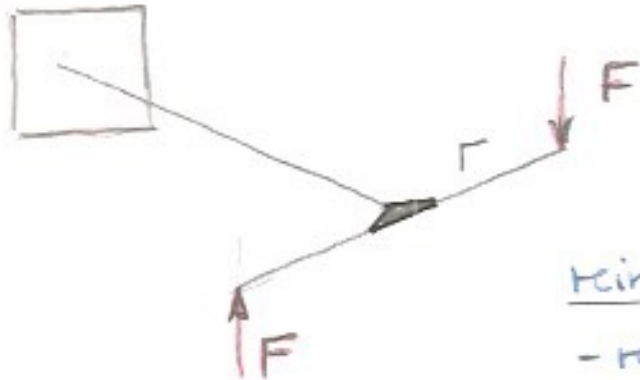


Grundlagen



keine Torsion

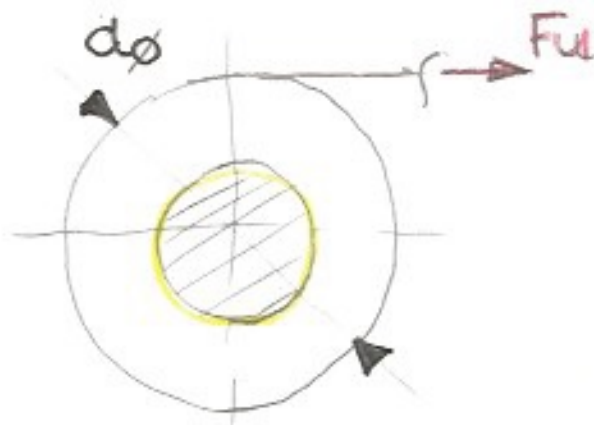
- relativ selten
- Kräftepaar in einer Ebene senkrecht zur Stabachse



Torsion und Biegung

- häufigster Fall
- alle MFK die ein Drehmoment übertragen

Belastungskennwert



$$M_t = F_{ul} \cdot \frac{d_{\phi}}{2}$$

häufigste Anwendung

$$M_t = 9550 \frac{P}{n}$$

n	P	M _t
min ⁻¹	kW	Nm

Beweis:

$$M_t = F \cdot r$$

$$P = F \cdot v = F \cdot \omega \cdot r = F \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot r$$

$$P = M_t \cdot 2 \pi \cdot n$$

$$M_t = \frac{1}{2\pi} \frac{P}{n}$$

$$M_t = \frac{1}{2\pi} \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{s}^{-1}}$$

normalerweise:

$$P [\text{W}] \quad \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

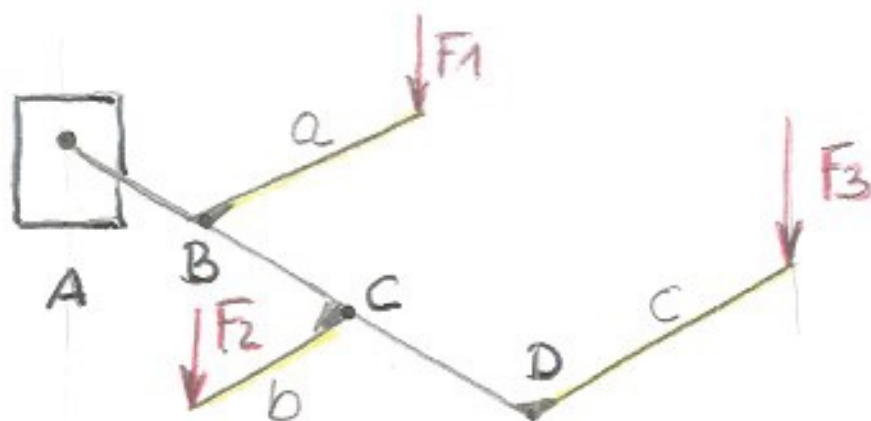
$$n [\text{s}^{-1}]$$

oder Praxis

$$P [\text{kW}]$$

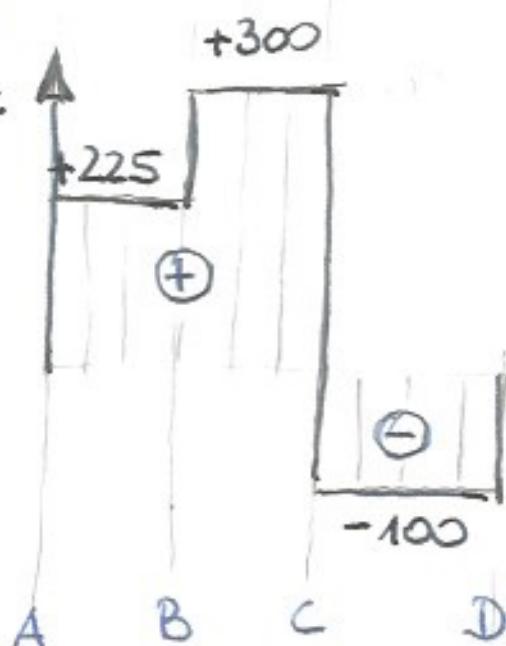
$$n [\text{min}^{-1}]$$

$$M_t = \frac{1}{2\pi} \cdot 1000 \cdot 60 \frac{P}{n} = 9550 \frac{P}{n}$$



[kNcm]

M_t



$$\overline{AB} = 1\text{m}$$

$$\overline{BC} = 0,5\text{m}$$

$$\overline{CD} = 1,5\text{m}$$

$$a = 15\text{cm}$$

$$b = 20\text{cm}$$

$$c = 10\text{cm}$$

$$F_1 = 5\text{ kN}$$

$$F_2 = 20\text{ kN}$$

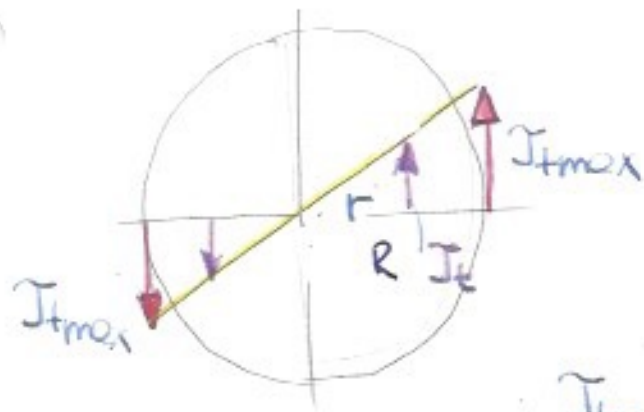
$$F_3 = 10\text{ kN}$$

$$M_{t\text{C-D}} = -F_3 \cdot c = -10 \cdot 10 = -100\text{ kNcm}$$

$$\begin{aligned} M_{t\text{B-C}} &= M_{t\text{C-D}} + F_2 \cdot b = -100 + 20 \cdot 20 = 300\text{ kNcm} \\ &= -F_3 \cdot c + F_2 \cdot b = -100 + 400 = 300\text{ kNcm} \end{aligned}$$

$$M_{t\text{A-B}} = M_{t\text{B-C}} - F_1 \cdot a = 300 - 5 \cdot 15 = 225\text{ kNcm}$$

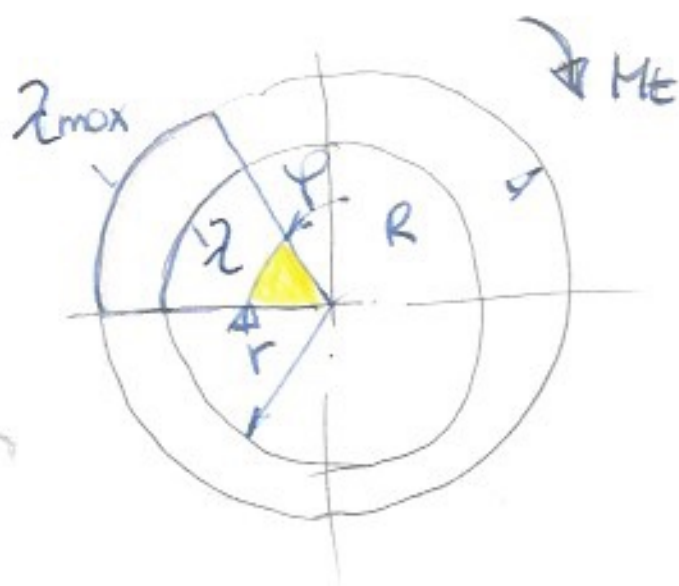
Torsion (Verdrillbeanspruchung)



Kreisförmiger Querschnitt

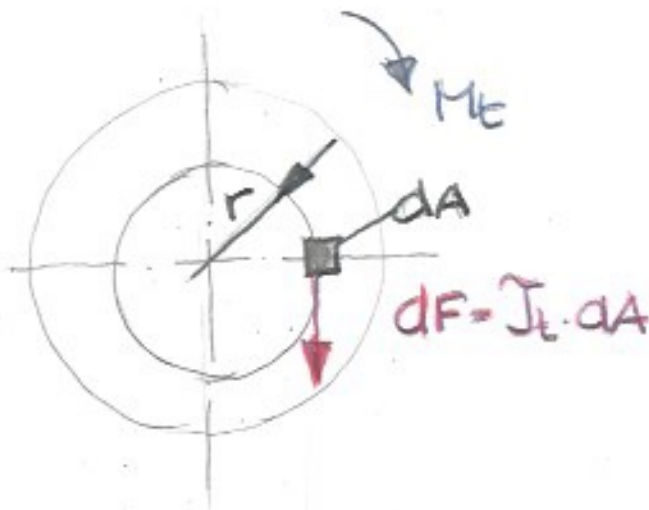
$$\frac{J_{tmax}}{R} = \frac{J_t}{r} \quad \text{- Verteilungsgesetz}$$

$$J_t = \frac{r}{R} J_{tmax}$$



$$\frac{\lambda}{r} = \frac{\lambda_{max}}{R} = \frac{\lambda}{r}$$

$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda} = \frac{R}{r} = \frac{J_{tmax}}{J_t}$$



allg.: $M_t = F \cdot r$

$$\begin{aligned} dM_t &= dF \cdot r \\ &= \tau_t \cdot dA \cdot r \\ &= \tau_{tmax} \cdot \frac{r}{R} \cdot r \cdot dA \\ &= \tau_{tmax} \cdot \frac{r^2}{R} \cdot dA \end{aligned}$$

$$\frac{\tau_{tmax}}{\tau_t} = \frac{R}{r}$$

$$\tau_t = \tau_{tmax} \cdot \frac{r}{R}$$

$$\int r^2 \cdot dA = I_p \quad (A)$$

$$M_t = \frac{\tau_{tmax}}{R} I_p$$

$$\frac{I_p}{R} = W_p$$

$$M_t = \frac{\tau_{tmax}}{R} \int r^2 \cdot dA \quad (A)$$

$$\underline{\tau_{tmax} = \frac{M_{tmax}}{W_p}}$$

$$I_p = \int_{(A)} r^2 dA$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$I_p = \int_{(A)} (x^2 + y^2) dA$$

$$= \int x^2 dA + \int y^2 dA$$

$$* I_p = 2 \cdot I = \frac{\pi}{32} d^4$$

$$W_p = \frac{\pi}{16} d^3$$



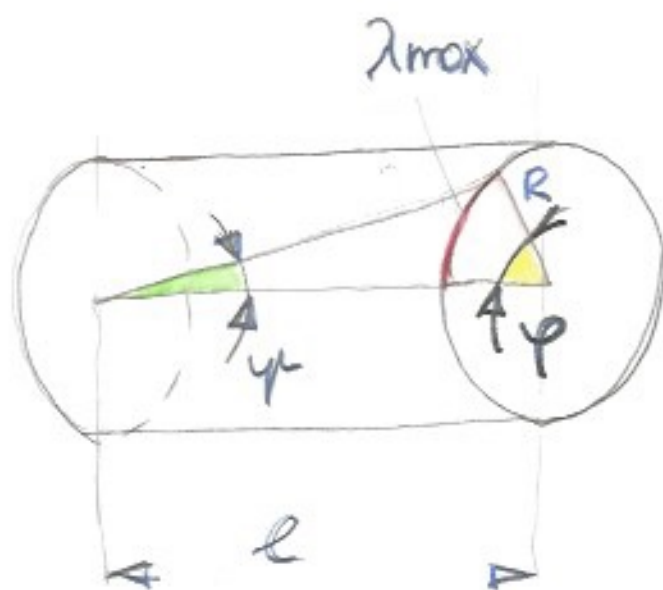
$$I_x = I_y = \frac{\pi}{64} d^4$$

$$* I_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$$

$$W_p = \frac{\pi}{16} \left(\frac{D^4 - d^4}{D} \right)$$



$$I_x = I_y = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$$



$$\hat{\psi} = \frac{\lambda_{\max}}{l} \quad ; \quad \lambda_{\max} = \hat{\psi} \cdot l$$

$$\hat{\varphi} = \frac{\lambda_{\max}}{R} \quad ; \quad \lambda_{\max} = \hat{\varphi} \cdot R$$

HOOKSCHES Gesetz

$$\tau_t \sim \gamma$$

$$\tau_t = G \cdot \gamma$$

$$\gamma = \frac{1}{G} \cdot \tau_t$$



$$G(\text{Stahl}) \approx 8 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$$

$$\hat{\varphi} \cdot R = \hat{\psi} \cdot l$$

$$\hat{\varphi} = \hat{\psi} \cdot \frac{l}{R} = \frac{\tau_t \cdot l}{G \cdot R} = \frac{M_t \cdot l \cdot R}{I_p \cdot G \cdot R} = \frac{M_t \cdot l}{I_p \cdot G}$$

$$\hat{\varphi} = \frac{M_t \cdot l}{I_p \cdot G}$$

Torsion - Verdrehwinkel

$$\hat{\varphi} = \frac{M_t \cdot l}{I_t \cdot G}$$



$$I_t = I_p = 2I$$

$$\varphi^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \frac{M_t \cdot l}{I_p \cdot G}$$

$$\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$$

Relativer Verdrehwinkel

$$\hat{\vartheta} = \frac{\hat{\varphi}}{l}$$

$$\hat{\vartheta} = \frac{M_t}{I_p \cdot G}$$

$$\vartheta^\circ = 57,3^\circ \cdot \frac{M_t}{I_p \cdot G}$$

$$\frac{\text{Nm} \cdot \text{m}^2}{\text{m}^4 \cdot \text{N}} = \frac{1}{\text{m}}$$

Zulässiger rel. Verdrehwinkel

$$\vartheta_{\text{zul}} = (0,25 \dots 0,33) \frac{^\circ}{\text{m}}$$

$$\vartheta_{\text{zul}} = \frac{0,25^\circ}{\text{m} \cdot 57,3^\circ} = 4,36 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{m}}$$

Entwurf: Berücksichtigung der Biegebeanspruchung
bei den meisten Wellen durch Verminderung
der zul. Torsionsspannung!

Triebwerksformel 1:

$$I_{\text{perf}} = \frac{M_t}{G \cdot \vartheta_{\text{zul}}}$$

$$G = 8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$\vartheta_{\text{zul}} = 0,25^\circ/\text{m}$$

$$I_p = \frac{\pi}{32} d^4$$

$$M_t = 9550 \cdot \frac{P}{n}$$

$$d^4 = \frac{9550 P \cdot 32 \text{ Nm}^3 \cdot \text{m} \cdot 180^\circ}{\pi^2 \cdot n \cdot 8 \cdot 10^{10} \text{ N} \cdot 0,25^\circ}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{9550 \cdot 32 \cdot 180^\circ}{\pi^2 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,25^\circ}} \cdot \sqrt[4]{\frac{P}{n}}$$

$$d = 0,13 \cdot \sqrt[4]{\frac{P}{n}}$$

P - kW
n - min⁻¹
d - m

Triebwerksformel 2:

$$\text{Werf} = \frac{M_t}{T_{\text{zul}}}$$

$$T_{\text{zul}} = 12 \text{ N/mm}^2 = 12 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$d^3 = \frac{9550 P \text{ Nm}^3 \cdot 16}{12 \cdot 10^6 n \cdot \pi}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{9550 \cdot 16}{12 \cdot 10^6 \cdot \pi}} \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{n}}$$

$$d = 0,16 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{n}}$$

d - m
P - kW
n - min⁻¹

Entwurf

$$I_{\text{erf}} = \frac{M_{\text{trotz}}}{G \cdot \vartheta_{\text{zul}}}$$

für $\vartheta_{\text{zul}} = 4,36 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{m}} \quad (0,25 \text{ } ^\circ/\text{m})$

$G = 8 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (\text{Stahl})$

$M_t = 9550 \cdot \frac{P}{n}$

P	n	M _t
KW	min ⁻¹	Nm

$\tau_{\text{t zul}} = 12 \dots 20 \text{ MPa} \quad (\text{St 42} \dots \text{St 70})$

Benicksichtigung der Biegebeanspruchung bei den meisten Wellen durch Verminderung der zul. Torsionsspannung!

Verformung

$$\frac{\pi}{32} d^4 = \frac{M_t}{G \cdot \vartheta_{\text{zul}}}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_t}{\pi \cdot G \cdot \vartheta_{\text{zul}}}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{32 \cdot 9550}{\pi \cdot 8 \cdot 10^{10}} \frac{\text{Nm}^3 \text{m}}{\text{N} \cdot 4,36 \cdot 10^{-3}}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{32 \cdot 9550}{\pi \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 4,36 \cdot 10^{-3}}} = 9,129 \text{ m}$$

$d_{\text{erf}} = 13 \sqrt[4]{\frac{P}{n}}$

d	P	n
cm	KW	min ⁻¹

$$W_{\text{eff}} = \frac{M_t}{T_{\text{zul}}}$$

$$T_{\text{zul}} = 12 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\frac{\pi}{16} d^3 = \frac{M_t}{T_{\text{zul}}}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot T_{\text{zul}}}}$$

$$d_{\text{eff}} = 16 \sqrt[3]{\frac{P}{n}}$$

d	P	n
cm	kW	min ⁻¹

$$\sqrt[3]{\frac{16 \cdot 9550}{\pi \cdot 12 \cdot 10^6}} \approx 0,16$$

↓
m

Diskriminante (Entscheidungszone)

Verformung Spannung (Festigkeit)

$$13 \left(\frac{P}{n} \right)^{\frac{1}{4}} = 16 \cdot \left(\frac{P}{n} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{13}{16} = \left(\frac{P}{n} \right)^{\frac{1}{12}}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{P}{n} = \left(\frac{13}{16} \right)^{12} = \frac{d\hat{p}}{d\tau}$$

$$\frac{P}{n} = 0,08$$

$$\frac{\text{Festigkeit}}{\text{Verformung}} = 0,08$$

$$D = 0,08$$

+ ist $D < 0,08$
wird Verformung
größer

$$\frac{P}{n} < 0,08 \rightarrow d = 13 \sqrt[4]{\frac{P}{n}}$$

$$\frac{P}{n} > 0,08 \rightarrow d = 16 \sqrt[3]{\frac{P}{n}}$$

Diskriminante $q_{08} = \frac{P}{n}$

-9-

$$\frac{P}{n} < q_{08} \Rightarrow d = 13 \sqrt[4]{\frac{P}{n}}$$

$$\frac{P}{n} > q_{08} \Rightarrow d = 16 \sqrt[3]{\frac{P}{n}}$$

P	n	d
kW	min ⁻¹	cm

Beispiele:

- Bestimmen Sie überschlägig den $\emptyset$ für eine Getriebewelle, die 60 kW bei 500 min⁻¹ zu überlagern hat!

$$\frac{P}{n} = \frac{60}{500} = 0,12 > q_{08} \rightarrow \text{Entwurf nach Festigkeits } \emptyset$$

$$d_{\text{erf}} = 16 \sqrt[3]{0,12} = 7,89 \text{ cm} \quad \underline{d_{\text{gew}} = 80 \text{ mm}}$$

- derf für P=60 kW bei n=900 min⁻¹

$$\frac{P}{n} = \frac{60}{900} = 0,0667 < q_{08} \rightarrow \text{Entwurf n. Formänderung}$$

$$d_{\text{erf}} = 13 \sqrt[4]{\frac{P}{n}} = 13 \sqrt[4]{0,0667} = 6,6 \text{ cm}$$

$$d_{\text{gew}} = 70 \text{ mm}$$

$$[\text{Festigkeits } \emptyset \quad 16 \sqrt[3]{0,0667} = 6,48 \text{ cm}]$$